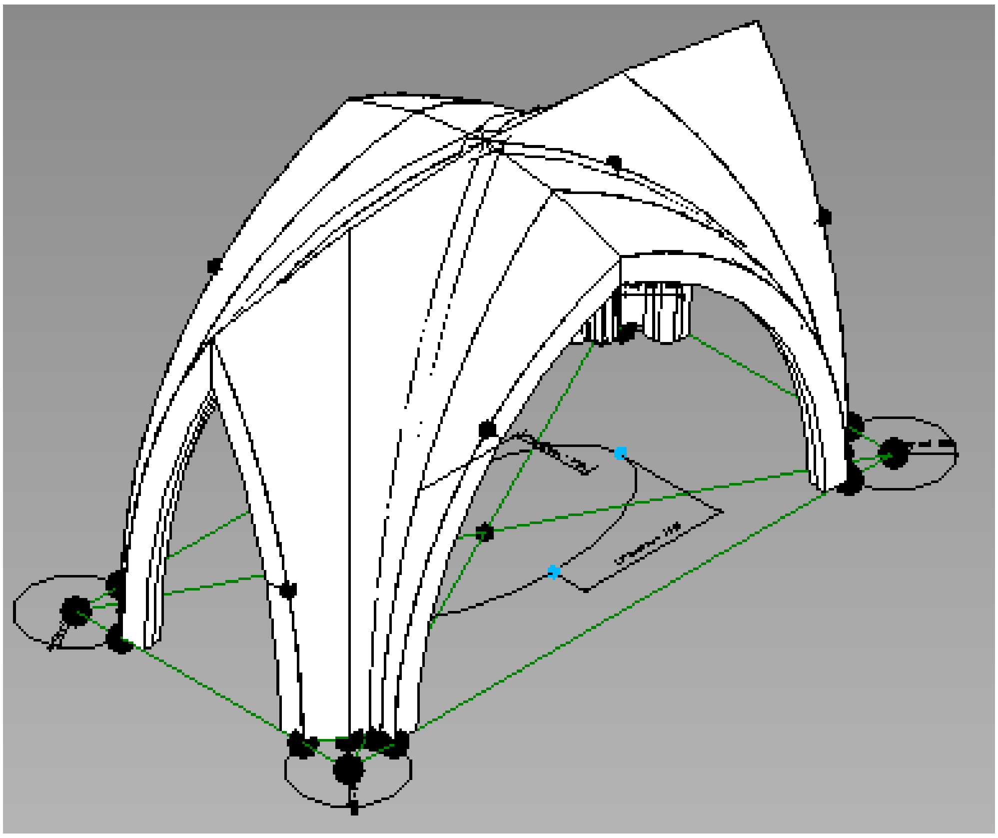
Voûte gothique sur une base rectangulaire L x L/2



SOMMAIRE

Voûte gothique sur une base rectangulaire L x L/2

Hypothèses/Contraintes :

1) La base carrée a pour dimension Longueur x Longueur.
   La base rectangulaire a pour dimension Longueur x Longueur/2
2) Les sommets de chaque arc brisé de la voûte à base **rectangulaire** sont à la même hauteur que ceux correspondant de la voûte à base **carrée**
3) Toutes les courbes correspondant aux nervures peuvent être modélisées avec des cercles dont le centre se trouve sur la droite contenant les points adaptatifs cliqués (notés clic 1, clic 2… ci-dessous).

A) DIAGONALES

Sur une base carrée

Ci-contre, en plan

A1) Calcul de D

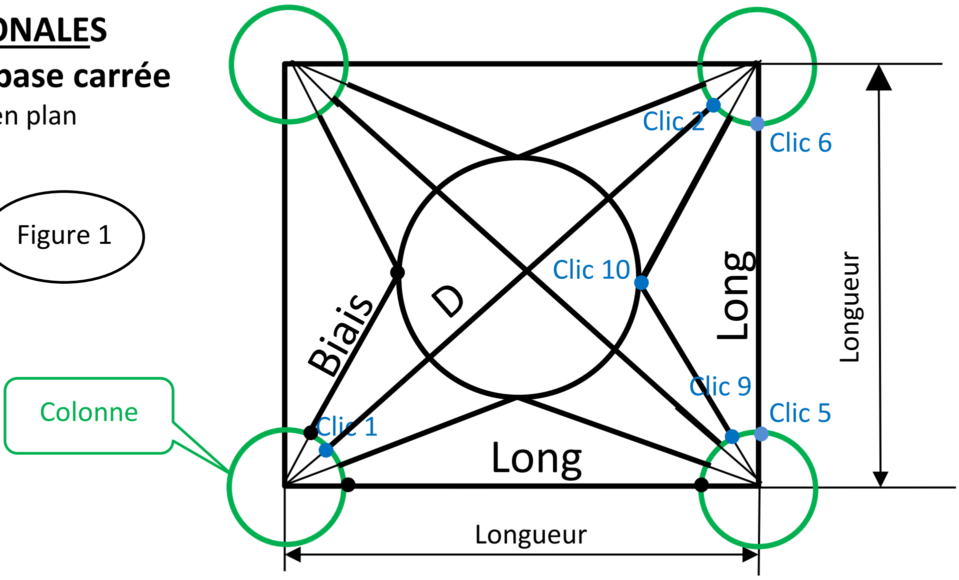
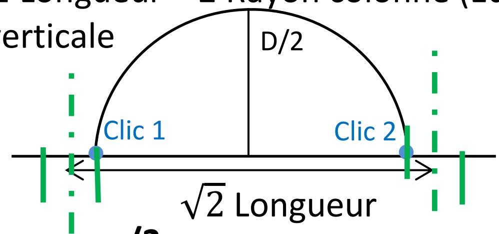


Figure 1

On a D + 2 Rayon colonne = $\sqrt{2}$ Longueur donc D = $\sqrt{2}$ Longueur – 2 Rayon colonne (Eq 1)

Le demi-cercle vertical, sur la diagonale, servant à représenter la voûte, a D/2 pour rayon. Son sommet est donc à la hauteur D/2.

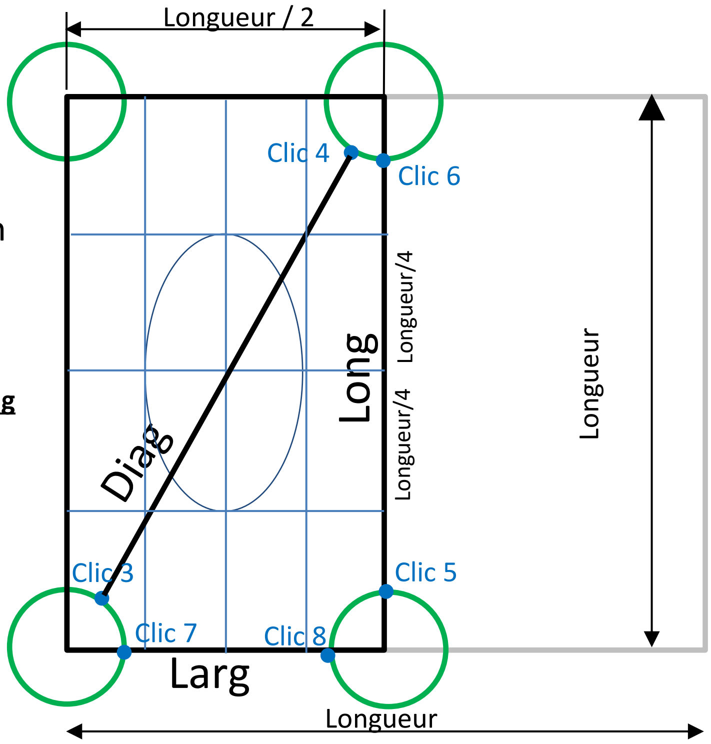
A la verticale



Sur une base rectangulaire définie par Longueur x Longueur /2

En plan

A2) Calcul de Diag



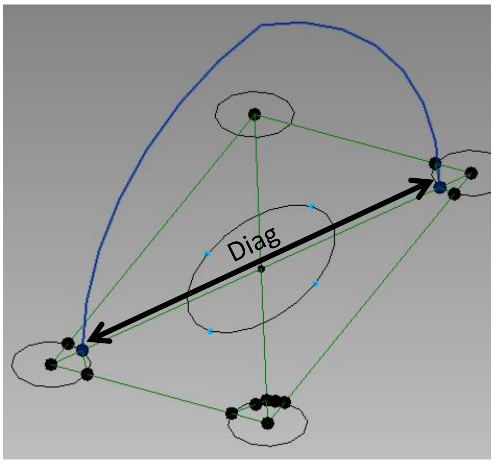


Figure 2

On a $(\text{Diag} + 2\ \text{Rayon colonne})^2 = \left(\frac{\text{Longueur}}{2}\right)^2 + \text{Longueur}^2 = \frac{5}{4}\,\text{Longueur}^2$

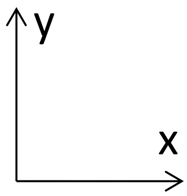
« Pythagore »

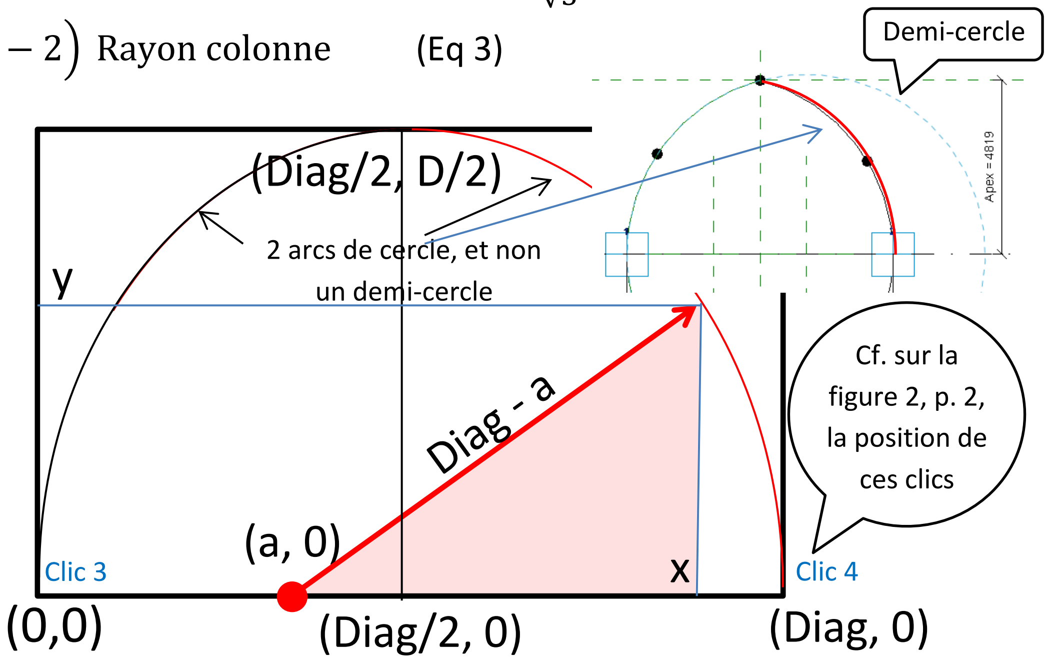
Donc $\text{Longueur} = (\text{Diag} + 2\ \text{Rayon colonne})\ 2 / \sqrt{5}$ (Eq 2)

Les Eq 1 et 2 donnent $D = \sqrt{2}\,(\text{Diag} + 2\ \text{Rayon colonne})\ \frac{2}{\sqrt{5}} - 2\ \text{Rayon colonne}$

$D = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\,\text{Diag} + \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} - 2\right)\ \text{Rayon colonne}$ (Eq 3)

A la verticale





A3) Calcul de l'abscisse a

Pour déterminer l'équation d'un cercle, il faut avoir trois informations (les coordonnées de 3 points du cercle, ou celles de 2 points et du centre, ou la valeur de son rayon). Ici, on a deux points du cercle, et une partie des coordonnées du centre du cercle (a, 0). Il faut calculer a.

Equation de l'arc de cercle, ci-dessus à droite, rouge, de centre (a, 0)

$(x - a)^2 + (y - 0)^2 = (\text{Diag} - a)^2$

« Pythagore » sur le triangle rose

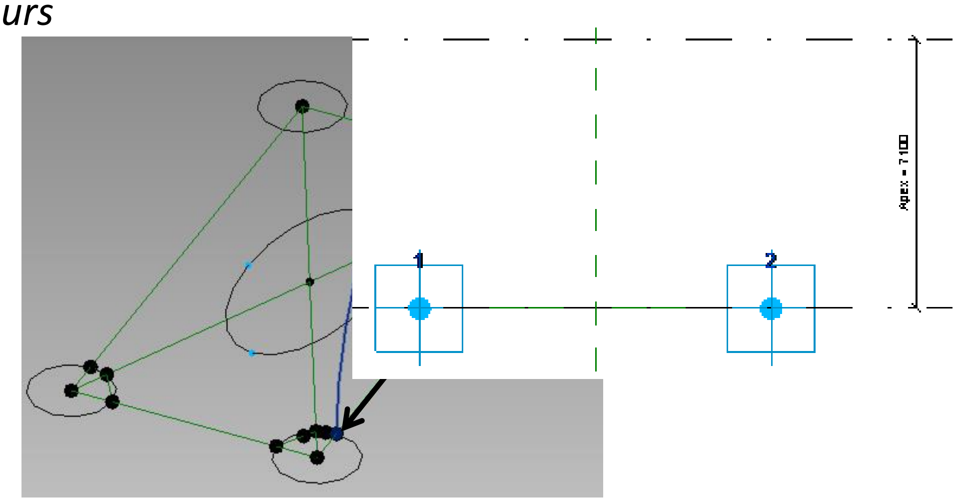
En haut, on a $\left(\frac{\text{Diag}}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{D}{2} - 0\right)^2 = (\text{Diag} - a)^2$

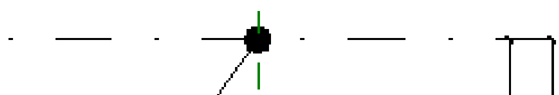
d'où $a = \dfrac{3\ \text{Diag}^2 - D^2}{4\ \text{Diag}}$ (Eq 4)

On peut aussi trouver ce centre **géométriquement**, sans autant de calculs (Cf. Annexe 1

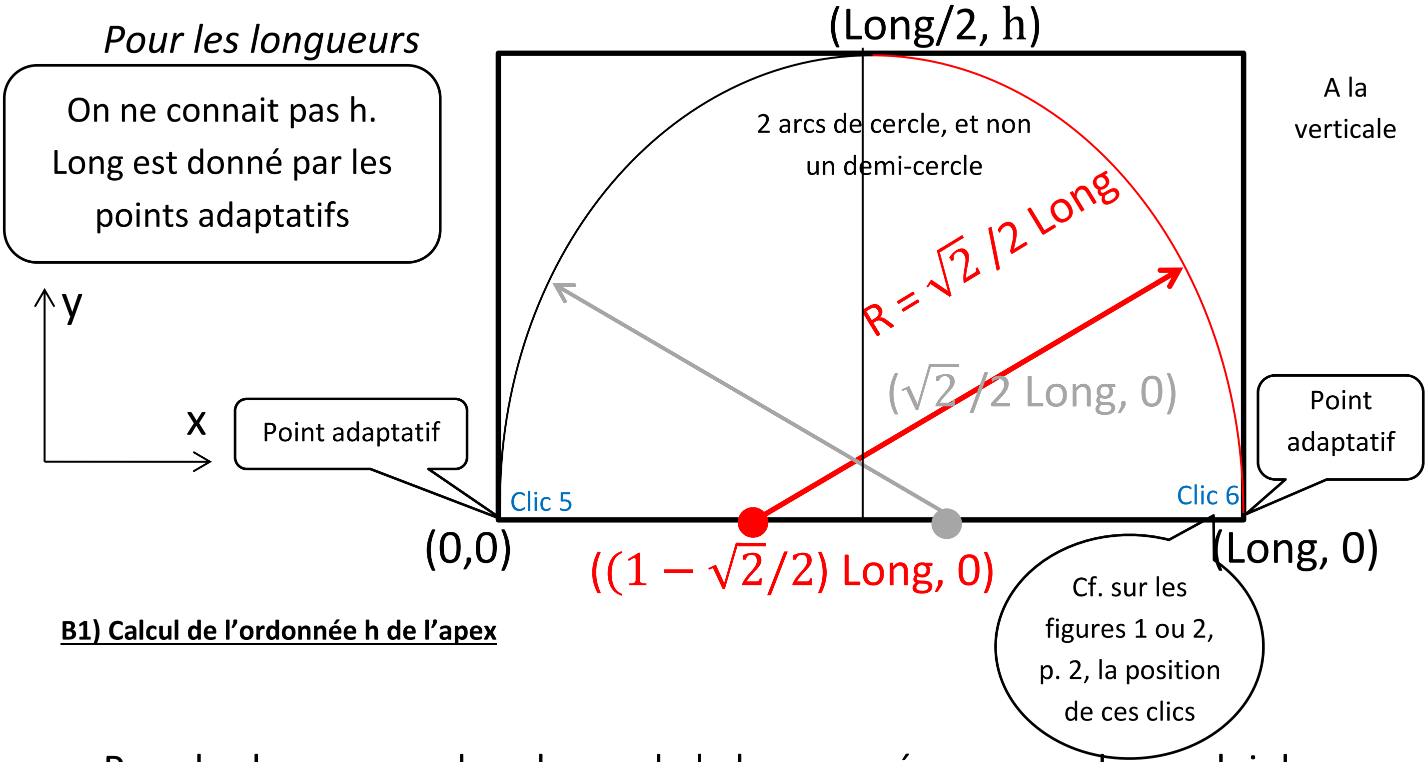
B) POURTOUR

Pour les longueurs





Pour les longueurs



B1) Calcul de l'ordonnée h de l'apex

Pour les longueurs, dans le cas de la base carrée comme dans celui de la base rectangulaire   Long + 2 * Rayon colonne = Longueur

On obtient 2 arcs de cercle de rayon $\sqrt{2}$ /2 Long (et non un demi-cercle).

Equation de l'arc de cercle rouge ci-dessus (« Pythagore »)

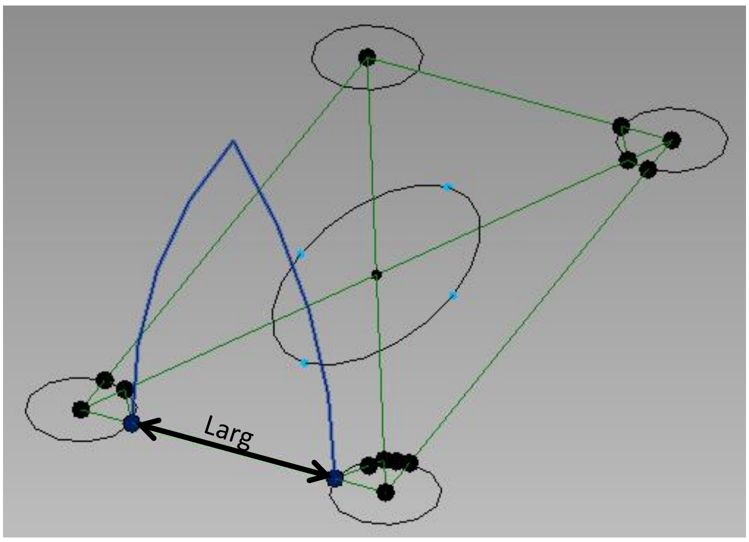
$$(x - (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\,\text{Long})^2 + (y - 0)^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{Long})^2 = \frac{1}{2}\,\text{Long}^2$$

En haut on a

$$(\frac{\text{Long}}{2} - (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\,\text{Long})^2 + (h - 0)^2 = \frac{1}{2}\,\text{Long}^2$$

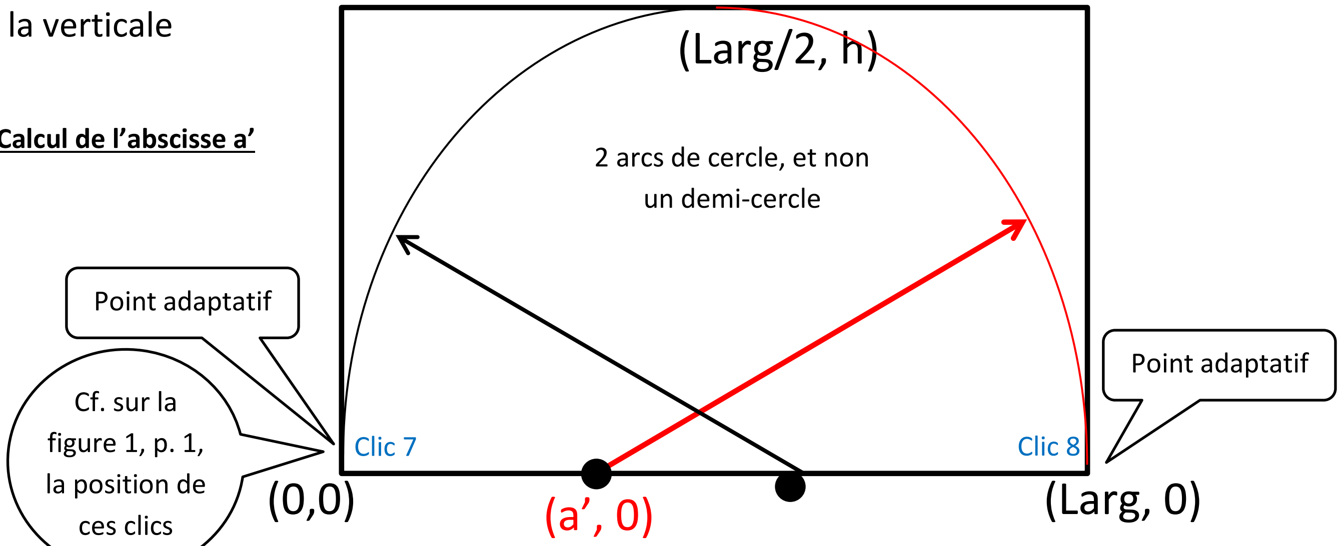
$$\text{D'où } h = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}}\right) \text{Long} = 0{,}6761 \text{ Long (Eq 5)}$$

Uniquement pour la base rectangulaire, pour les largeurs



A la verticale

B2) Calcul de l’abscisse a’



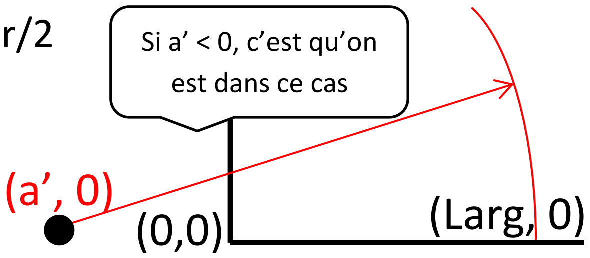
L’apex h est imposé par le résultat obtenu sur le côté longueur. Il faut donc connaître la valeur de Longueur, ou de Long, même quand on trace l’arc brisé correspondant à la largeur.

Larg + 2 Rayon colonne = Largeur = Longueur/2

Longueur = 2 (Larg + 2 Rayon colonne)

Equation du cercle rouge ci-dessus

$(x - a')^2 + (y - 0)^2 = (\mathrm{Larg} - a')^2$



En haut, on a

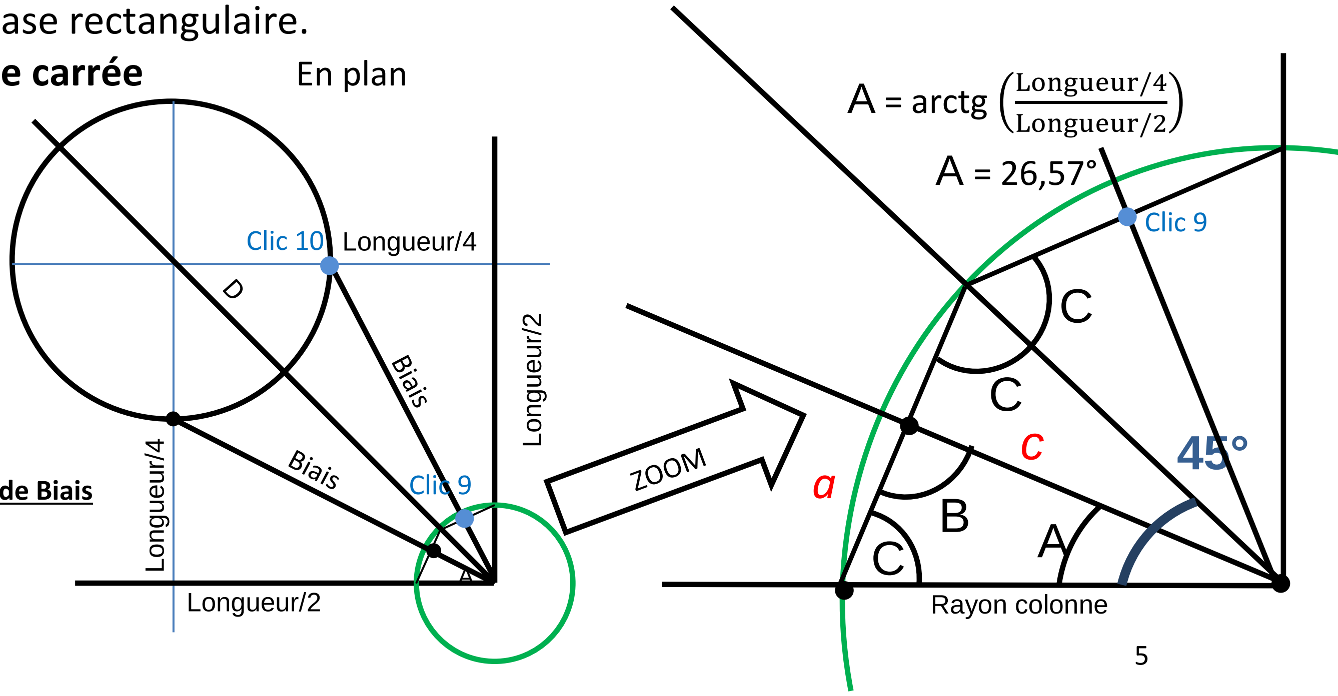
$$\left(\frac{\mathrm{Larg}}{2} - a'\right)^2 + h^2 = (\mathrm{Larg} - a')^2 \quad \text{d’où } a' = \frac{3}{4}\,\mathrm{Larg} - \frac{h^2}{\mathrm{Larg}} \text{ (Eq 6)}$$

C) JONCTIONS en biais

Comme précédemment, il faut calculer la hauteur h’ de l’apex dans le cas de la **base carrée**, et l’imposer comme valeur haute dans le cas de la base rectangulaire.

Base carrée En plan

C1) Calcul de Biais



$2\ C = 180 - 360/8 = 180 - 45 = 135 \quad C = 67{,}5°$

$A + B + C = 180°$ $\quad B = 180 - A - C = 360 - 26{,}57 - 67{,}5 = 85{,}93\ °$

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{\text{Rayon colonne}}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

On peut retrouver ces valeurs numériques **géométriquement** directement dans Revit en travaillant sur un carré (Cf. Annexe 2)

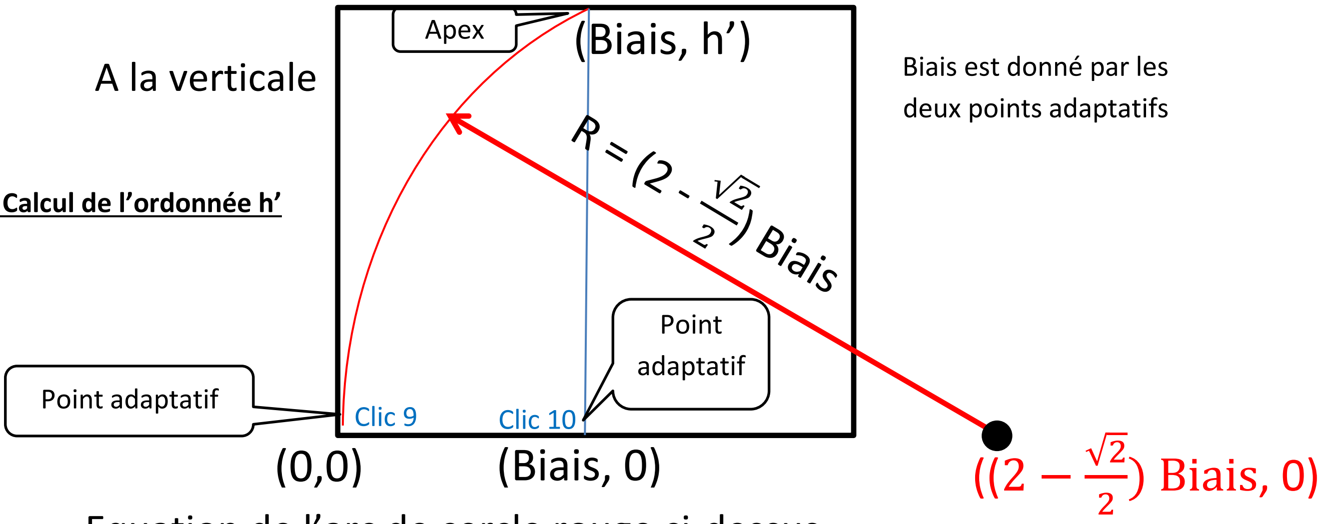
$$c = \frac{\sin(C)}{\sin(B)}\ \text{Rayon colonne} = \frac{\sin(67{,}5)}{\sin(85{,}93)}\ \text{Rayon colonne}$$

$$\text{Biais} = ((\text{Longueur}/2)^2 + (\text{Longueur}/4)^2)^{0{,}5} - c$$

$$\text{Biais} = \frac{\sqrt{5}}{4}\ \text{Longueur} - \frac{\sin(67{,}5)}{\sin(85{,}93)}\ \text{Rayon colonne (Eq 7)}$$

A la verticale

C2) Calcul de l'ordonnée h'



Biais est donné par les deux points adaptatifs

Equation de l'arc de cercle rouge ci-dessus

$$(x - (2 - \tfrac{\sqrt{2}}{2})\ \text{Biais})^2 + (y - 0)^2 = ((2 - \tfrac{\sqrt{2}}{2})\ \text{Biais})^2$$

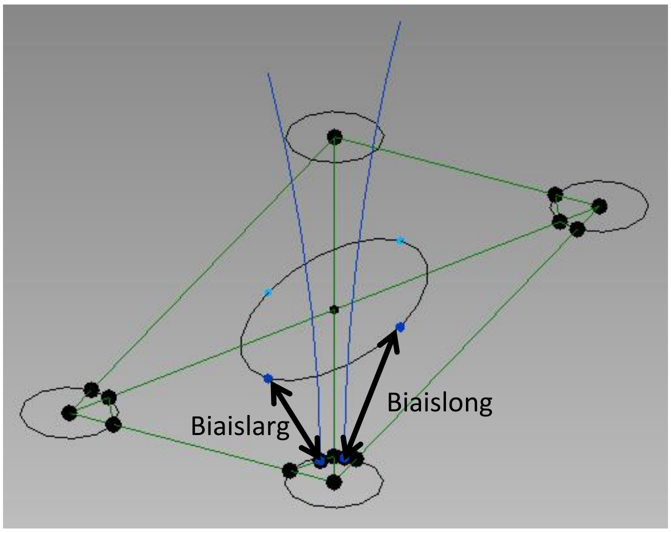
En haut, cela donne

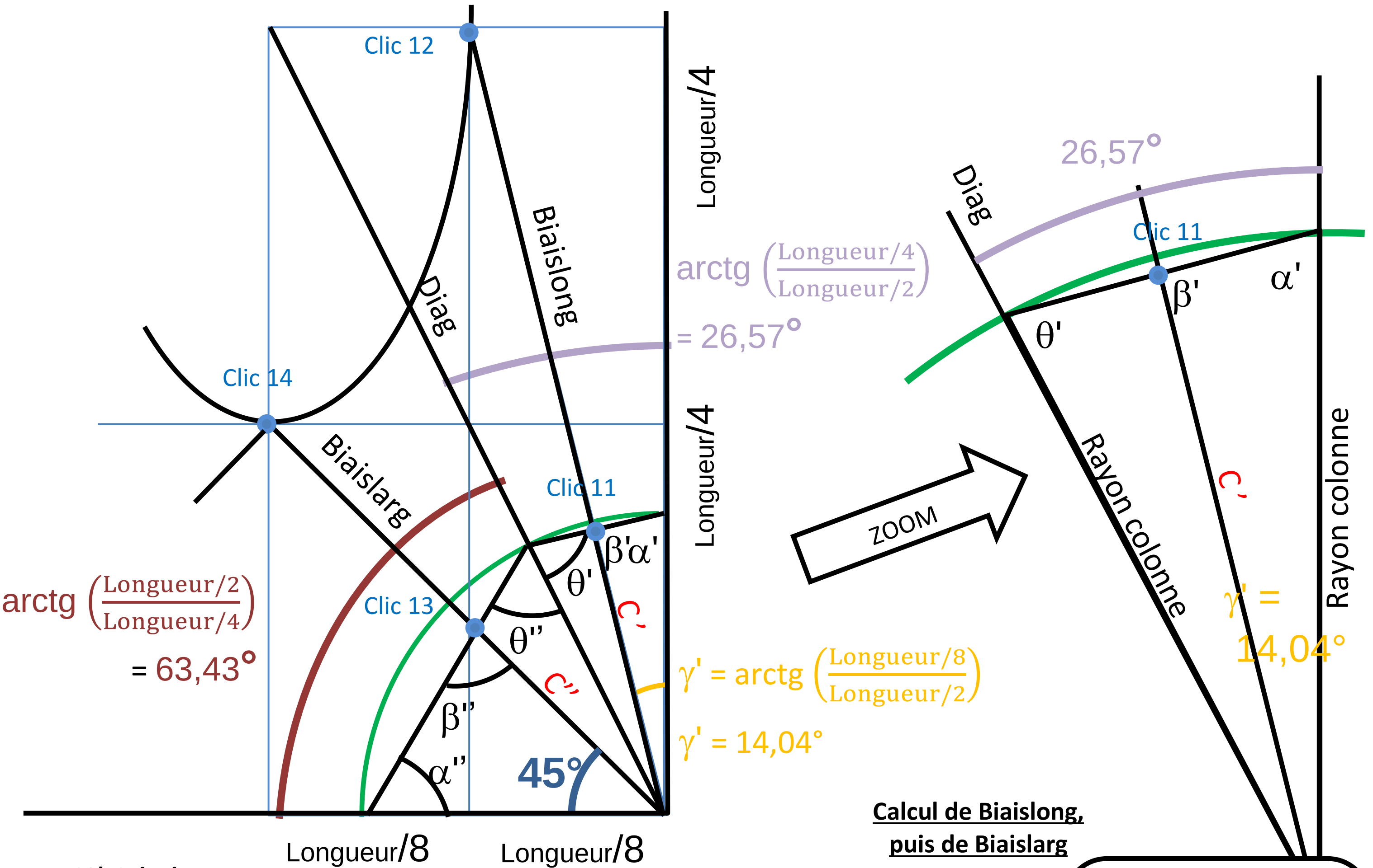
$$(\text{Biais} - (2 - \tfrac{\sqrt{2}}{2})\ \text{Biais})^2 + (h' - 0)^2 = ((2 - \tfrac{\sqrt{2}}{2})\ \text{Biais})^2$$

$$h' = \left(\sqrt{3 - \sqrt{2}}\right)\ \text{Biais (Eq 8)}$$

Valeur de la base carrée à imposer dans le cas de la base rectangulaire

Biais sur la base rectangulaire





Calcul de Biaislong, puis de Biaislarg

C3) Calcul de Biaislong

Toutes ces valeurs peuvent être trouvées directement **géométriquement** (Cf. p 8 et sur Annexe 2 p 11), sans calcul donc.

Pour la base rectangulaire, pour les longueurs

$\frac{\text{Rayon colonne}}{\sin(\theta')} = \frac{\text{Rayon colonne}}{\sin(\alpha')}$ donc θ' = α' (modulo…)

180 = θ' + α' + 26,57 donc α' = (180- 26,57)/2 = 76,72°

180 = 14,04 + β' + α' donc β' = 180 – 14,04 – 76,72 = 89,24°

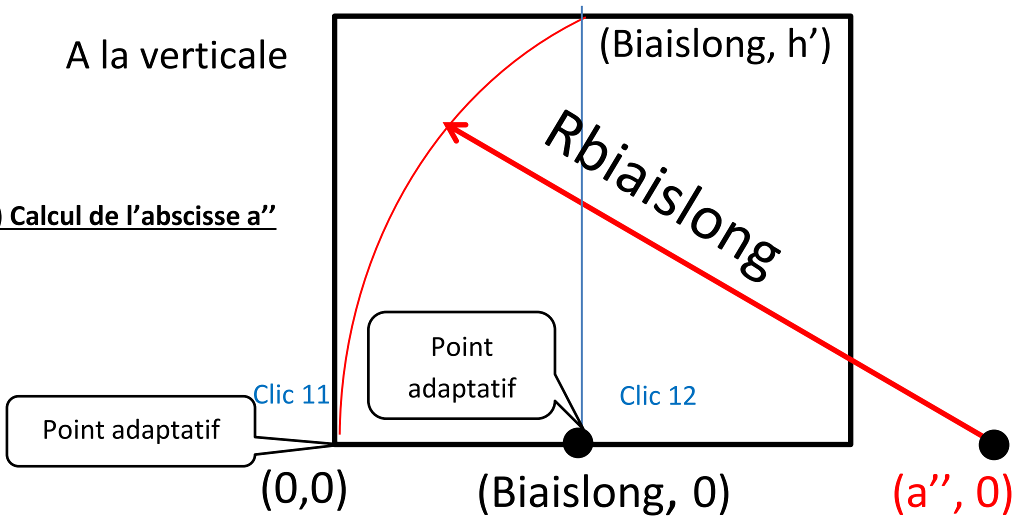
$\frac{\text{Rayon colonne}}{\sin(\beta')} = \frac{c'}{\sin(\alpha')}$ donc c' = $\frac{\sin(\alpha')}{\sin(\beta')}$ Rayon colonne = $\frac{\sin(76{,}72)}{\sin(89{,}24)}$ Rayon colonne

Biaislong = $\left((\text{Longueur}/2)^2 + (\text{Longueur}/8)^2\right)^{0,5}$ – c'

d'où Biaislong = $\frac{\sqrt{17}}{8}$ Longueur – $\frac{\sin(76{,}72)}{\sin(89{,}24)}$ Rayon colonne

A la verticale

C4) Calcul de l'abscisse a''

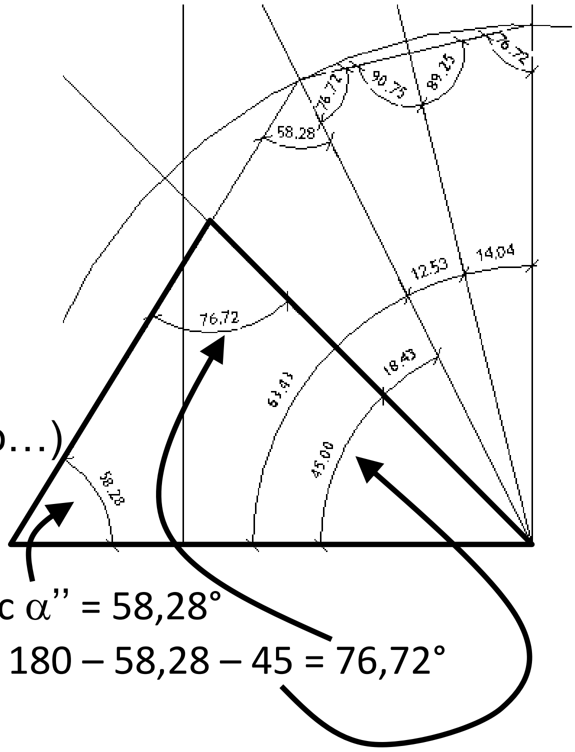


Equation de l'arc de cercle rouge ci-dessus

$(x - a'')^2 + (y - 0)^2 = a''^2$

En haut $\quad (Biaislong - a'')^2 + (h' - 0)^2 = a''^2$

d'où $a'' = \dfrac{Biaislong^2 + h'^2}{2\ Biaislong}$ = Rbiaislong (Eq 9)



C5) Calcul de Biaislarg

Pour la base rectangulaire, pour les largeurs

$\dfrac{\text{Rayon colonne}}{\sin(\gamma)} = \dfrac{\text{Rayon colonne}}{\sin(\theta)}$ donc $\gamma = \theta$ (modulo…)

$180 = \alpha'' + \theta'' + 63{,}43 = 2\,\alpha'' + 63{,}43$ donc $\alpha'' = 58{,}28°$

$180 = \alpha'' + \beta'' + 45$ donc $\beta'' = 180 - \alpha'' - 45 = 180 - 58{,}28 - 45 = 76{,}72°$

$\dfrac{\text{Rayon colonne}}{\sin(\beta)} = \dfrac{c''}{\sin(\alpha)}$

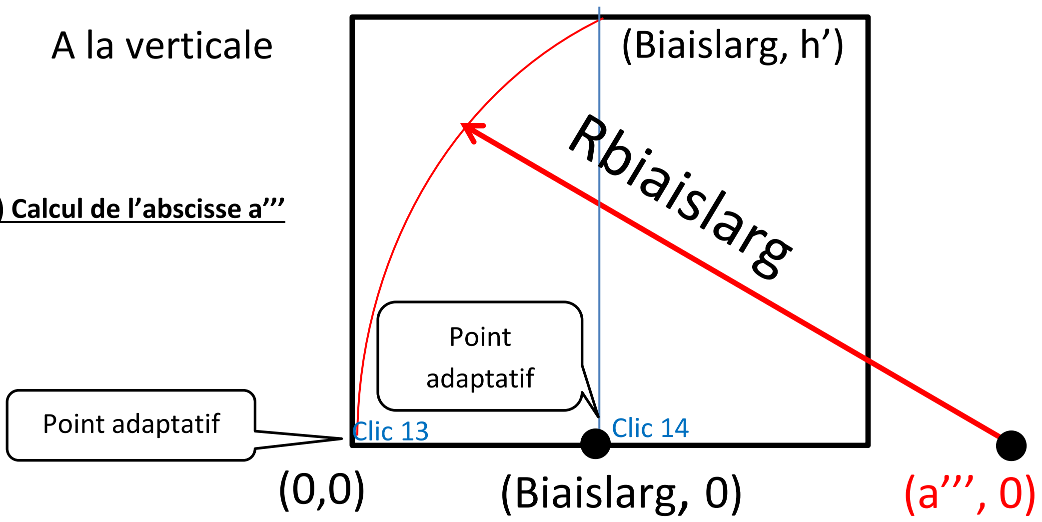
donc $c'' = \dfrac{\text{Sin}(\alpha'')}{\sin(\beta'')}$ Rayon colonne = $\dfrac{\text{Sin}(58{,}28)}{\sin(76{,}72)}$ Rayon colonne

$Biaislarg = \left((Longueur/4)^2 + (Longueur/4)^2\right)^{0,5} - c''$

d'où $Biaislarg = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ Longueur $- \dfrac{\sin(58{,}28)}{\sin(76{,}72)}$ Rayon colonne

A la verticale

C6) Calcul de l'abscisse a'''



Equation de l'arc de cercle rouge

$(x - a''')^2 + (y - 0)^2 = a'''^2$

En haut $\quad (Biaislarg - a''')^2 + (h' - 0)^2 = a'''^2$

d'où $a''' = \dfrac{Biaislarg^2 + h'^2}{2\ Biaislarg}$ = Rbiaislarg (Eq 10)

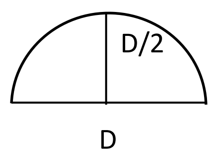
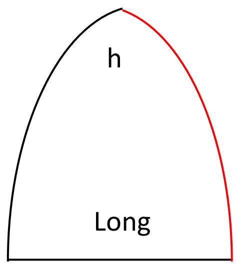
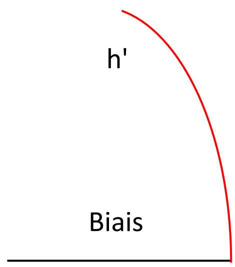
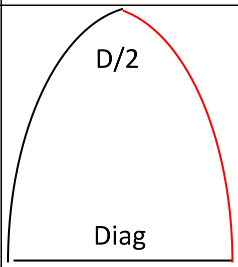
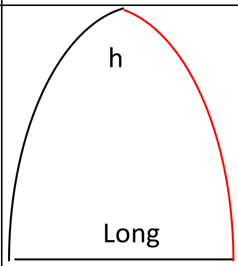
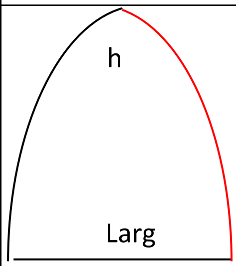
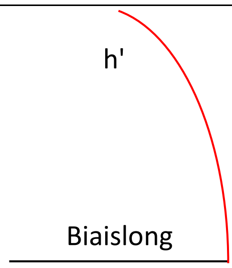
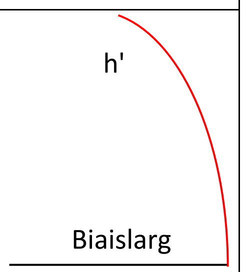
D) METHODE dans Revit :

Pour chaque famille à imbriquer ensuite dans la famille principale

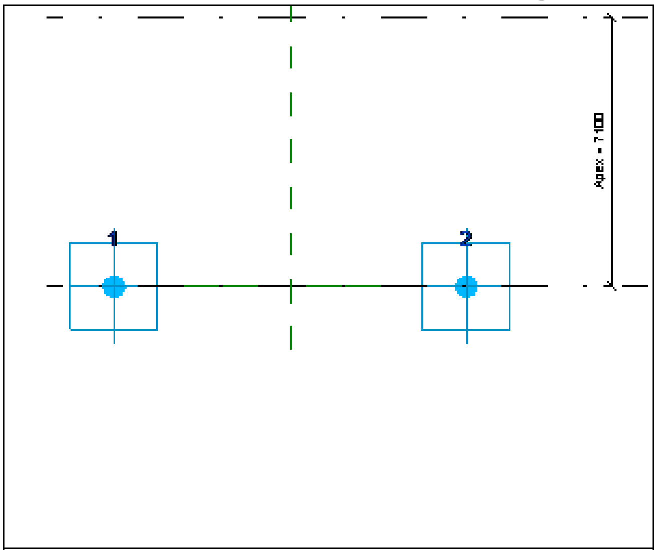
- Le tracé de point adaptatif à point adaptatif permet de déterminer une longueur (Diag, Long, Larg, Biaislong, Biaislarg)

A partir de celle-ci,

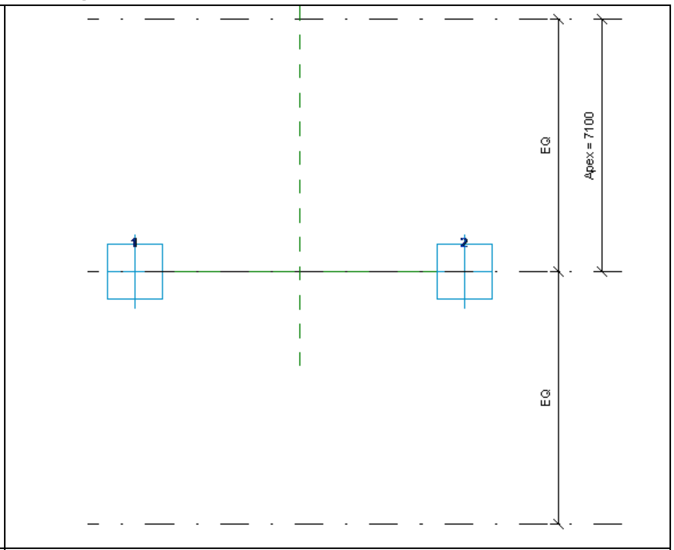
- on calcule la longueur de la base rectangulaire/carrée,
- la hauteur de l'apex en fonction de cette longueur (D/2, h, h')
- l'abscisse du centre sur l'axe x (a, a' ou a'')
- et/ou le rayon de l'arc de cercle supportant la voûte
- …

<table>
<tr><td rowspan="4">Base carrée</td><td>Distance entre les points adaptatifs</td><td>D</td><td colspan="2">Long</td><td colspan="2">Biais</td></tr>
<tr><td>Apex</td><td>D/2</td><td colspan="2">h</td><td colspan="2">h'</td></tr>
<tr><td>Centre</td><td>D/2</td><td colspan="2">$(1-\sqrt{2}/2)$ Long</td><td colspan="2">$(2-\frac{\sqrt{2}}{2})$ Biais</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Base rectangulaire</td><td>Distance entre les points adaptatifs</td><td>Diag</td><td>Long</td><td>Larg</td><td>Biaislong</td><td>Biaislarg</td></tr>
<tr><td>Apex
(à imposer)</td><td>D/2</td><td>h</td><td>h</td><td>h'</td><td>h'</td></tr>
<tr><td>Centre</td><td>a</td><td>$(1-\sqrt{2}/2)$ Long</td><td>a'</td><td>a''</td><td>a'''</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

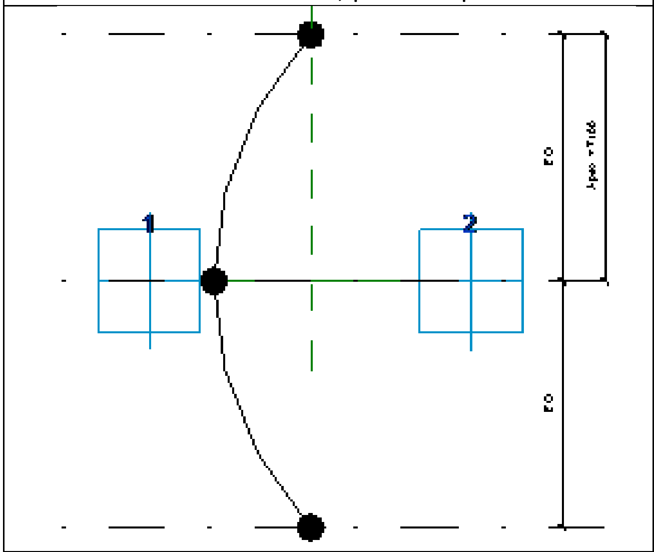
Annexe 1 : Détermination **géométrique** du centre de l'arc de cercle

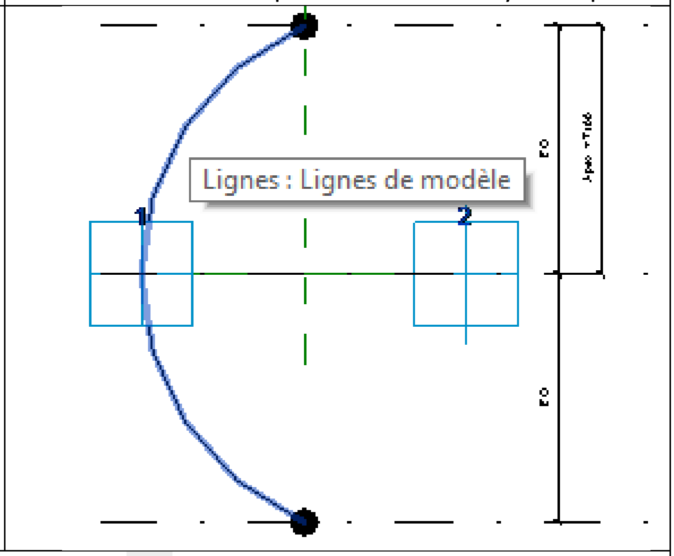


En élévation, placer l'apex

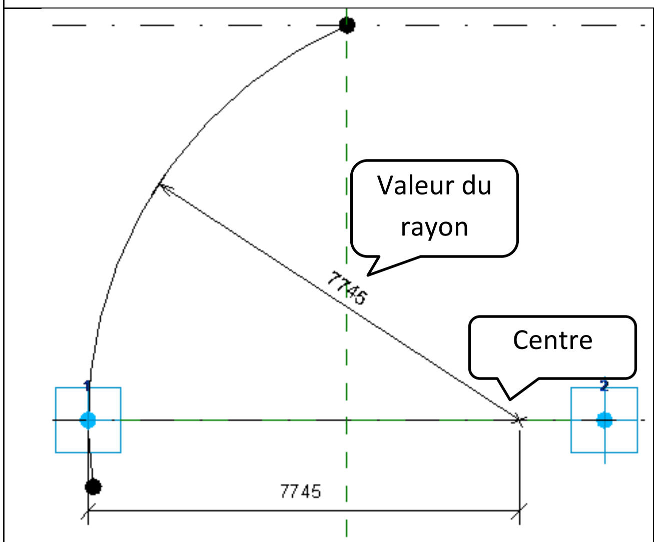


Installer en bas un plan de référence symétrique





Placer un arc de cercle avec l'outil Arc-début-fin-rayon passant par l'apex et par le point 1



Sélectionner l'arc et cocher la propriété

Marque centrale visible ☐

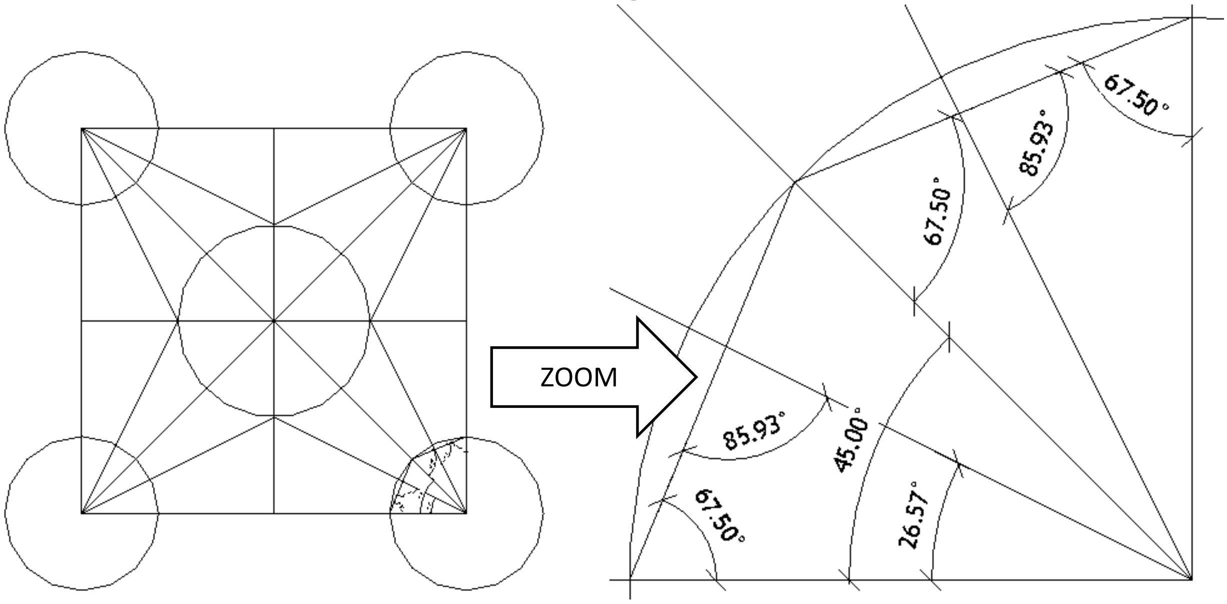
Placer un point sur le centre et tracer un arc de cercle du point 1 jusque sur l'apex (accrochage plus facile dans ce sens que dans l'autre).

Faire de même du coté du point 2, à droite, à partir d'un nouveau centre, à gauche.

Avec cette méthode, on peut se passer du calcul de a, a', a'' et a'''.

En fait, toutes les familles (sauf la principale) peuvent être construites avec cette méthode. Il suffit donc d'en faire une, de base, à décliner en plusieurs versions en fonction des apex h, h'et h''

Annexe 2 : Vérification géométrique de la valeur des angles dans le cas d’une base carrée (Figures faite sur Revit)



Annexe 3 : Vérification géométrique de la valeur des angles dans le cas de la base rectangulaire Longueur x Longueur/2 (Figures faite sur Revit)